

Terminale Spécialité Mathématiques

TRAAM 24-25

Académie de Dijon

19 mai 2025

- 1 Un problème de dénombrement
- 2 Interrogation d'une IA
- 3 Une piste pour sortir du problème

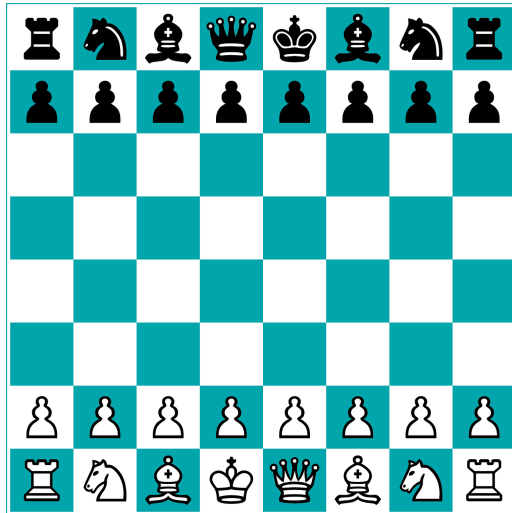
Définition

Les échecs aléatoires Fischer (en anglais, Fischer Random Chess) sont une variante du jeu d'échecs dans laquelle l'emplacement initial des pièces de la première et de la dernière rangée est tiré au sort, mais reste identique pour les deux camps. Ils sont nommés ainsi d'après le joueur d'échecs américain Bobby Fischer qui les a popularisés.

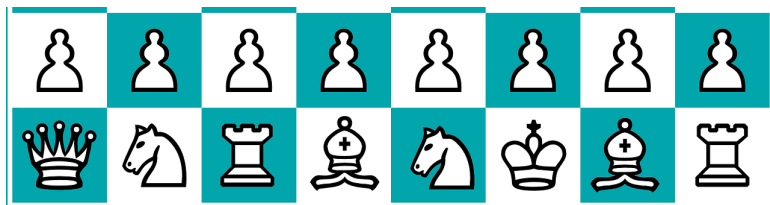
Les règles du jeu sont exactement les mêmes qu'aux échecs classiques, sauf que l'emplacement initial des pièces de la première rangée est tiré au sort (les pièces du camp adverse étant disposées de la même manière).

- Le roi doit se trouver quelque part entre les deux tours afin de permettre le petit et le grand roque.
- Les fous doivent obligatoirement être placés sur des cases de couleurs différentes.

échiquier classique



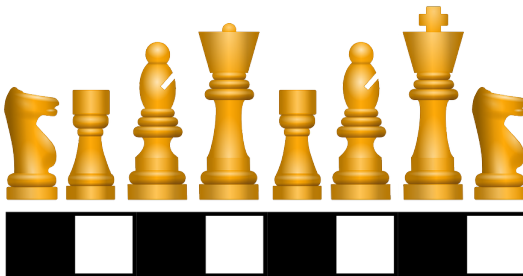
Une variante possible



- Les pions restent sur leur ligne.
- Le roi se trouve quelque part entre les deux tours.
- Les fous sont placés sur des cases de couleurs différentes.

Question :

Combien y-a-t'il de positions initiales possibles dans les échecs aléatoires ?



- 1 Un problème de dénombrement
- 2 Interrogation d'une IA
- 3 Une piste pour sortir du problème

Une première réponse

Question : *Déterminer le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer*

Le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer, également connue sous le nom de Chess960 ou Fischer Random Chess, peut être déterminé en suivant les règles spécifiques de cette variante. Dans Chess960, les pièces de la première rangée (à l'exception des pions) sont placées de manière aléatoire, mais avec certaines contraintes :

1. Les deux fous doivent être placés sur des cases de couleurs différentes.
2. L'évêque doit être placé entre le roi et une tour.

Pour déterminer le nombre de placements possibles, nous devons considérer ces contraintes. Voici les étapes pour calculer ce nombre :

1. Placement des fous : Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

Une première réponse

Question : *Déterminer le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer*

Le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer, également connue sous le nom de Chess960 ou Fischer Random Chess, peut être déterminé en suivant les règles spécifiques de cette variante. Dans Chess960, les pièces de la première rangée (à l'exception des pions) sont placées de manière aléatoire, mais avec certaines contraintes :

1. Les deux fous doivent être placés sur des cases de couleurs différentes.
2. L'évêque doit être placé entre le roi et une tour.

Pour déterminer le nombre de placements possibles, nous devons considérer ces contraintes. Voici les étapes pour calculer ce nombre :

1. Placement des fous : Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

Une première réponse

Question : *Déterminer le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer*

Le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer, également connue sous le nom de Chess960 ou Fischer Random Chess, peut être déterminé en suivant les règles spécifiques de cette variante. Dans Chess960, les pièces de la première rangée (à l'exception des pions) sont placées de manière aléatoire, mais avec certaines contraintes :

1. Les deux fous doivent être placés sur des cases de couleurs différentes.
2. L'évêque doit être placé entre le roi et une tour.

Pour déterminer le nombre de placements possibles, nous devons considérer ces contraintes. Voici les étapes pour calculer ce nombre :

1. Placement des fous : Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

1. Placement des fous :

Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

2. Placement des autres pièces :

Après avoir placé les fous, il reste 6 cases pour placer les autres pièces (roi, dame, cavaliers et tours).

Le nombre de façons de placer ces 6 pièces est $6! = 720$.

3. Contrainte de l'évêque :

Pour chaque arrangement des 6 pièces, nous devons vérifier si l'évêque est placé entre le roi et une tour.

Cette contrainte réduit le nombre de placements valides. Cependant, cette contrainte est automatiquement satisfaite par la nature aléatoire du placement dans Chess960.

En combinant ces étapes, le nombre total de placements possibles est :

$$6 \times 720 = 4320$$

Cependant, dans Chess960, il y a une contrainte supplémentaire qui réduit ce nombre à exactement 960 positions de départ valides, d'où le nom "Chess960".

Donc, le nombre de placements possibles des pièces dans la variante d'échecs de Bobby Fischer est 960.

Analyse de la réponse de l'IA

1. Placement des fous :

Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

Ce calcul du nombre de placements des fous est-il correct ?

Interrogé indépendamment la même IA a proposé :

Placement des fous :

Le premier fou peut être placé sur n'importe laquelle des 8 cases.

Le second fou doit être placé sur une case de couleur différente, donc il y a 4 choix possibles.

Nombre de façons de placer les fous : $8 \times 4 = 32$.

Est-ce la bonne réponse ?

Analyse de la réponse de l'IA

1. Placement des fous :

Il y a 4 cases blanches et 4 cases noires sur la première rangée.

Nous devons choisir 2 cases blanches parmi les 4 pour placer les fous. Cela peut être fait de $\binom{4}{2} = 6$ façons.

Ce calcul du nombre de placements des fous est-il correct ?

Interrogé indépendamment la même IA a proposé :

Placement des fous :

Le premier fou peut être placé sur n'importe laquelle des 8 cases.

Le second fou doit être placé sur une case de couleur différente, donc il y a 4 choix possibles.

Nombre de façons de placer les fous : $8 \times 4 = 32$.

Est-ce la bonne réponse ?

Analyse de la réponse de l'IA

En combinant ces étapes, le nombre total de placements possibles est : $6 \times 720 = 4320$

Le raisonnement qui conduit à ce calcul est-il exact ? Sur quel principe s'appuie-t-il ?

2. L'évêque doit être placé entre le roi et une tour.

L'IA est-il en train de résoudre le bon problème ?

Analyse de la réponse de l'IA

En combinant ces étapes, le nombre total de placements possibles est : $6 \times 720 = 4320$

Le raisonnement qui conduit à ce calcul est-il exact ? Sur quel principe s'appuie-t-il ?

2. L'évêque doit être placé entre le roi et une tour.

L'IA est-il en train de résoudre le bon problème ?

Origine du problème

L'IA fait plusieurs des erreurs dans sa réponse :

- Mauvais calcul de dénombrement
- Mauvaise compréhension du problème

Mais l'IA propose un raisonnement valide qui consiste à appliquer le principe multiplicatif.

Seconde question : *Peux-tu revoir ce calcul car il semble que la seconde contrainte que tu indiques n'est pas la bonne ?*

Vous avez raison, la contrainte que j'ai mentionnée n'est pas correcte.

Revoyons le calcul en tenant compte des contraintes correctes pour Chess960.

Dans Chess960, les pièces de la première rangée (à l'exception des pions) sont placées de manière aléatoire, mais avec les contraintes suivantes :

1. Les deux fous doivent être placés sur des cases de couleurs différentes.
2. Le roi doit être placé entre les deux tours.

Voici les étapes pour calculer le nombre de placements possibles :

Calcul du nombre de positions possibles

Pour respecter ces règles, il faut placer les pièces dans cet ordre :

1. Placer les deux fous :

Les fous doivent être sur des cases de couleurs opposées.

Sur une rangée de huit cases (numérotées de 1 à 8), les cases impaires sont noires et les cases paires sont blanches.

Il y a donc 4 cases noires et 4 cases blanches parmi lesquelles on peut choisir les cases pour les fous.

Choisissons une case noire pour le premier fou (4 possibilités) et une case blanche pour le second fou (4 possibilités). Cela donne $4 \times 4 = 16$ façons de placer les deux fous.

2. Placer le roi et les deux tours :

Le roi doit être entre les deux tours pour permettre le roque. Sur les 5 cases restantes (après avoir placé les fous), nous devons placer le roi et les deux tours. Plaçons d'abord les deux tours sur deux des 5 cases libres, en laissant une case entre elles pour le roi.

Il y a 3 façons de placer le roi entre les deux tours (choisir la case pour le roi parmi les 3 cases du centre).

Cela donne $3 \times 2 = 6$ façons de disposer le roi et les deux tours.

3. Placer la dame et les cavaliers :

Après avoir placé les fous, les tours, et le roi, il reste exactement 3 cases vides. Nous plaçons la dame sur l'une de ces 3 cases (3 choix possibles).

Puis, les deux cavaliers prennent les deux cases restantes, sans restriction. Cela donne $3! = 6$ façons de placer la dame et les cavaliers.

Calcul final

En multipliant les possibilités obtenues pour chaque étape, nous avons :

$$16 \times 6 \times 6 = 960$$

Il y a donc 960 positions de départ possibles en Chess960, ce qui rend chaque partie potentiellement très différente et limite l'impact des connaissances d'ouverture classiques.

Analyse de la réponse de l'IA

1. Placer les deux fous :

Les fous doivent être sur des cases de couleurs opposées. Sur une rangée de huit cases (numérotées de 1 à 8), les cases impaires sont noires et les cases paires sont blanches. Il y a donc 4 cases noires et 4 cases blanches parmi lesquelles on peut choisir les cases pour les fous. Choisissons une case noire pour le premier fou (4 possibilités) et une case blanche pour le second fou (4 possibilités). Cela donne $4 \times 4 = 16$ façons de placer les deux fous.

Ce calcul du nombre de placements des fous est-il correct ?

Analyse de la réponse de l'IA

1. Placer les deux fous :

Les fous doivent être sur des cases de couleurs opposées. Sur une rangée de huit cases (numérotées de 1 à 8), les cases impaires sont noires et les cases paires sont blanches. Il y a donc 4 cases noires et 4 cases blanches parmi lesquelles on peut choisir les cases pour les fous. Choisissons une case noire pour le premier fou (4 possibilités) et une case blanche pour le second fou (4 possibilités). Cela donne $4 \times 4 = 16$ façons de placer les deux fous.

Ce calcul du nombre de placements des fous est-il correct ?

Analyse de la réponse de l'IA

2. Placer le roi et les deux tours :

Le roi doit être entre les deux tours pour permettre le roque. Sur les 5 cases restantes (après avoir placé les fous), nous devons placer le roi et les deux tours.

Plaçons d'abord les deux tours sur deux des 5 cases libres, en laissant une case entre elles pour le roi.

Il y a 3 façons de placer le roi entre les deux tours (choisir la case pour le roi parmi les 3 cases du centre).

Cela donne $3 \times 2 = 6$ façons de disposer le roi et les deux tours.

Ce calcul du nombre de placements est-il correct ?

Analyse de la réponse de l'IA

3. Placer la dame et les cavaliers :

Après avoir placé les fous, les tours, et le roi, il reste exactement 3 cases vides. Nous plaçons la dame sur l'une de ces 3 cases (3 choix possibles).

Puis, les deux cavaliers prennent les deux cases restantes, sans restriction. Cela donne $3! = 6$ façons de placer la dame et les cavaliers.

Ce calcul du nombre de placements est-il correct ?

Analyse de la réponse de l'IA

Calcul final

*En multipliant les possibilités obtenues pour chaque étape,
nous avons : $16 \times 6 \times 6 = 960$*

Il y a donc 960 positions de départ possibles

Le raisonnement et le calcul sont-ils corrects ?

- 1 Un problème de dénombrement
- 2 Interrogation d'une IA
- 3 Une piste pour sortir du problème

Pour choisir une position initiale, il faut :

1. Placer les deux fous :

4 choix pour placer le fou noir, puis 4 choix pour placer le fou blanc, soit $4 \times 4 = 16$ manières de placer les deux fous.

Puis, **2. Placer le roi et les tours :**

pour cela il suffit de choisir 3 cases parmi les 6 cases qui restent libres, soit $\binom{6}{3} = 20$ possibilités. Le roi sera placé sur la case située entre les deux autres.

Puis, **3. Placer la dame et les cavaliers :**

pour cela il suffit de déterminer la place de la dame parmi les 3 cases restantes soit 3 choix possibles. Les cavaliers seront placés sur les deux cases libres restantes.

Par principe multiplicatif, il y a $16 \times 20 \times 3 = 960$ positions initiales possibles.