

## Activité mathématique - Modélisation de la méthode du bâton

Soit  $(AB)$  la droite représentant la pente,  $[AB]$  représente l'empreinte du bâton dans la neige,  $[AC]$  le premier bâton et  $[CD]$  le second bâton utilisé comme bâton pendule.

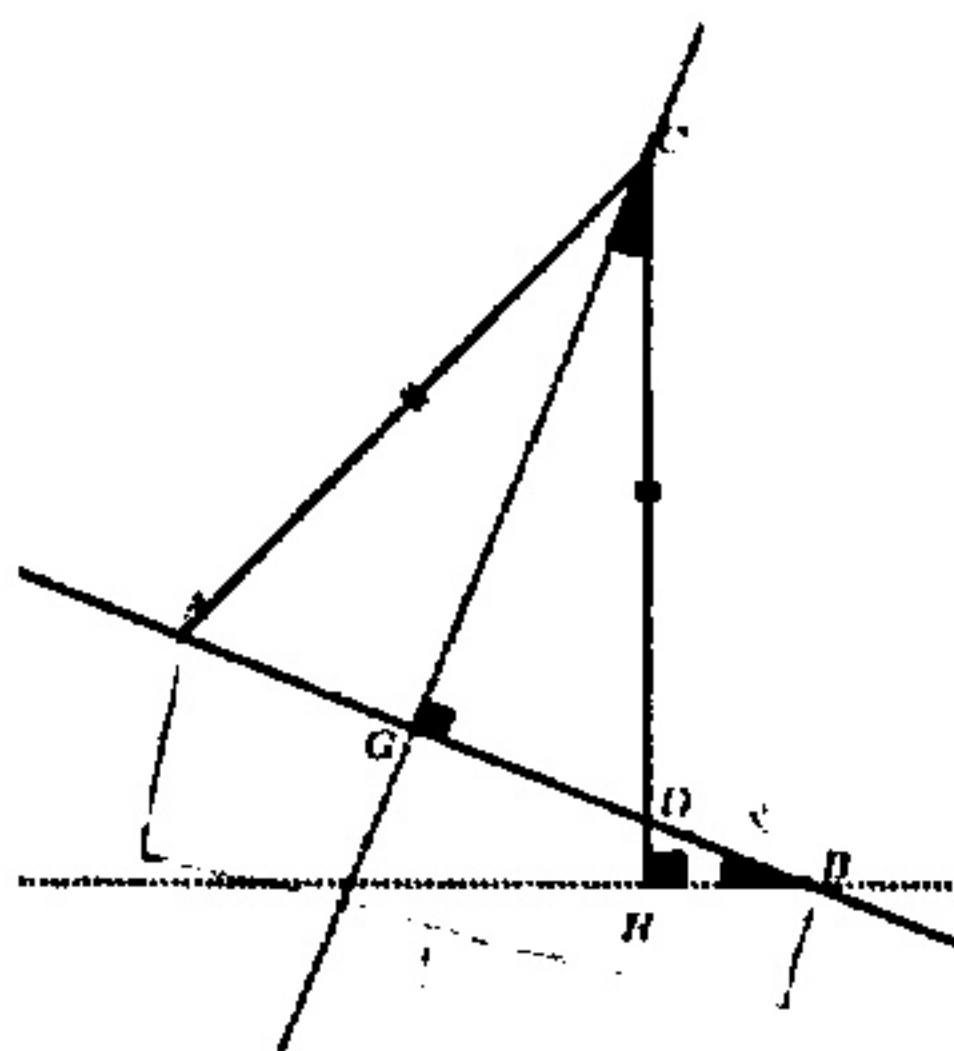


FIGURE 1 - Pente inférieure à  $30^\circ$

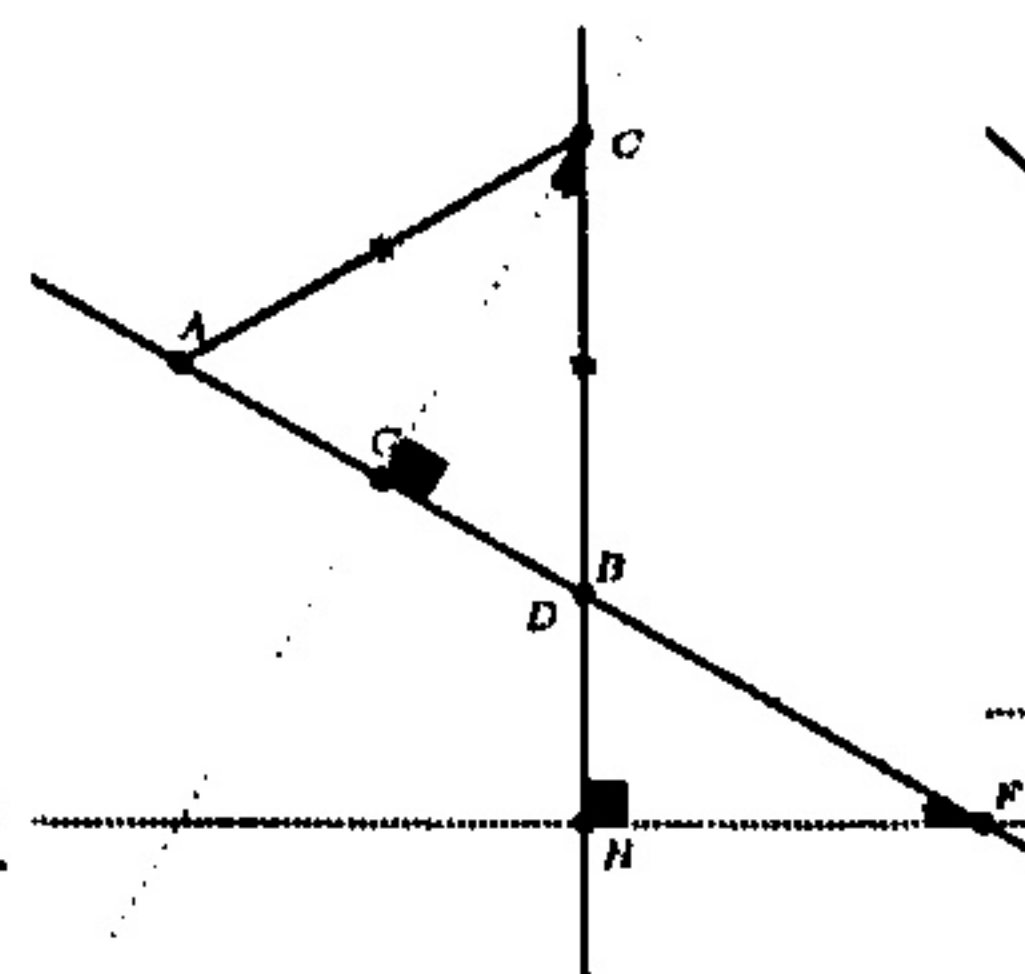


FIGURE 2 - Pente de  $30^\circ$

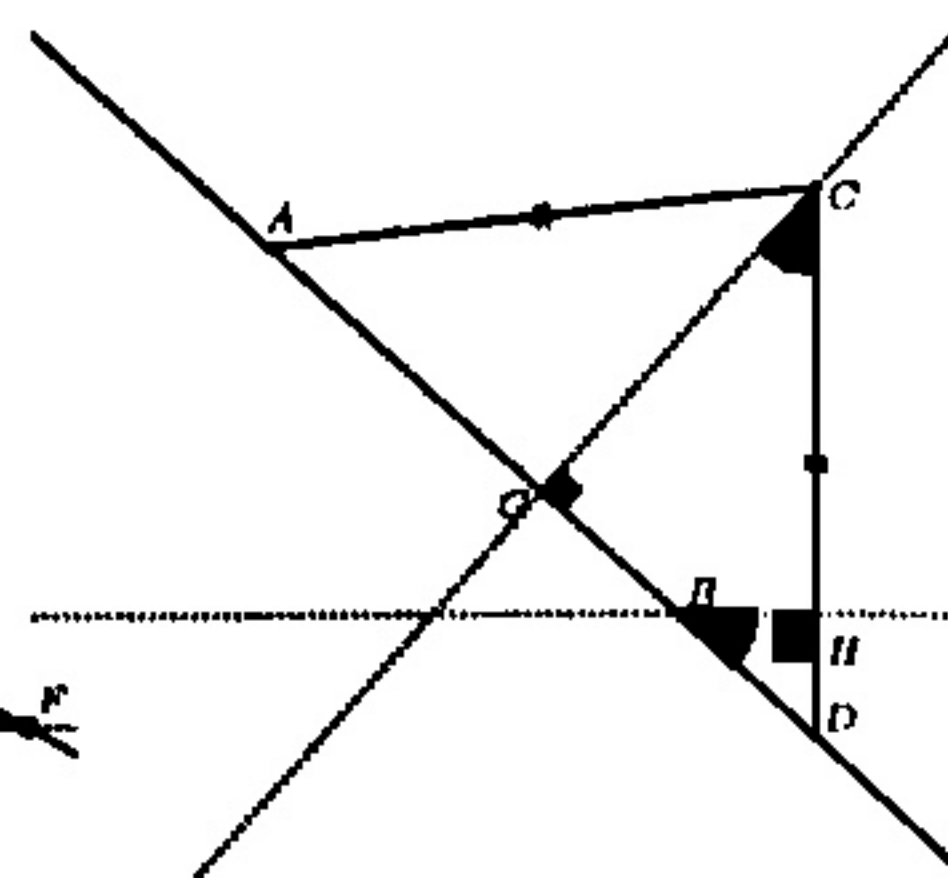


FIGURE 3 - Pente supérieure à  $30^\circ$

- Démontrer que l'angle de la pente est égal à la moitié de l'angle formé par les bâtons. Remarquer que ce raisonnement reste valable pour les trois configurations possibles.

Rappel : Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux paires d'angles opposés par le sommet qui sont égaux.

$$\begin{aligned} \text{Dans } \triangle GCD : \quad \widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} &= 180^\circ \\ \text{Dans } \triangle HDB : \quad \widehat{HDB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH} &= 180^\circ \\ \text{Donc } \widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} &= \widehat{HDB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH} \end{aligned}$$

- On note  $\alpha$  l'angle de la pente. Dans le triangle rectangle CGD, exprimer  $\sin(\alpha)$  en fonction de la longueur du bâton  $L$  et l'écart sous forme de longueur algébrique entre la marque de l'empreinte du bâton et l'extrémité du bâton pendule, noté  $x$  (Il s'agit de  $AB - AD$ ).

$$\sin(\alpha) = \frac{GD}{CD} = \frac{\frac{L-x}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L-x}{L} \times \frac{1}{1} = \frac{L-x}{L}$$

- Quels sont les paramètres dont dépend la mesure de l'angle ? Chaque paramètre est-il pris en compte dans la méthode du bâton ?

La longueur du bâton ( $L$ ) et l'écart ( $x$ )  
Non,  $L$  n'est pas pris en compte dans la méthode.

- Par groupe, on propose de construire trois tableaux de valeurs de la pente  $\alpha$  pour des longueurs de bâtons variant de 140 cm à 160 cm par exemple 140 cm pour le premier groupe, 150 cm pour le second et 160 cm pour le dernier, en fonction des écarts algébriques suivants  $-30, -20, -10, +10, +20, +30$  (dont l'unité est le cm). Vous pouvez vous aider de la calculatrice (Attention, il faut que votre calculatrice soit réglée en degré et non en radian). Les résultats devront être arrondis aux centièmes.

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	42,7°
-40	40°
-30	37,4°
-20	34,2°
-10	32,4°
10	27,6°
20	25,3°
30	23,3°
40	20,9°
50	18,7°

TABLE 4 - Bâton de 140 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,8°
-40	39,3°
-30	36,9°
-20	34,5°
-10	32,2°
10	27,8°
20	25,7°
30	23,6°
40	21,5°
50	19,5°

TABLE 5 - Bâton de 150 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,0°
-40	38,6°
-30	36,4°
-20	34,2°
-10	32,0°
10	27,9°
20	25,4°
30	23,3°
40	21,0°
50	18,9°

TABLE 6 - Bâton de 160 cm

- Selon vous, les résultats obtenus remettent-ils en question la validité de la méthode du bâton ? Argumenter votre réponse.

Non, les résultats obtenus ne remettent pas en question la validité de la méthode du bâton, car ils ne sont pas significatifs. On constate que malgré la différence de taille de bâton, le changement de degré de la pente n'est pas important.

## Activité mathématique - Modélisation de la méthode du bâton

Soit  $(AB)$  la droite représentant la pente,  $[AB]$  représente l'empreinte du bâton dans la neige,  $[AC]$  le premier bâton et  $[CD]$  le second bâton utilisé comme bâton pendule.

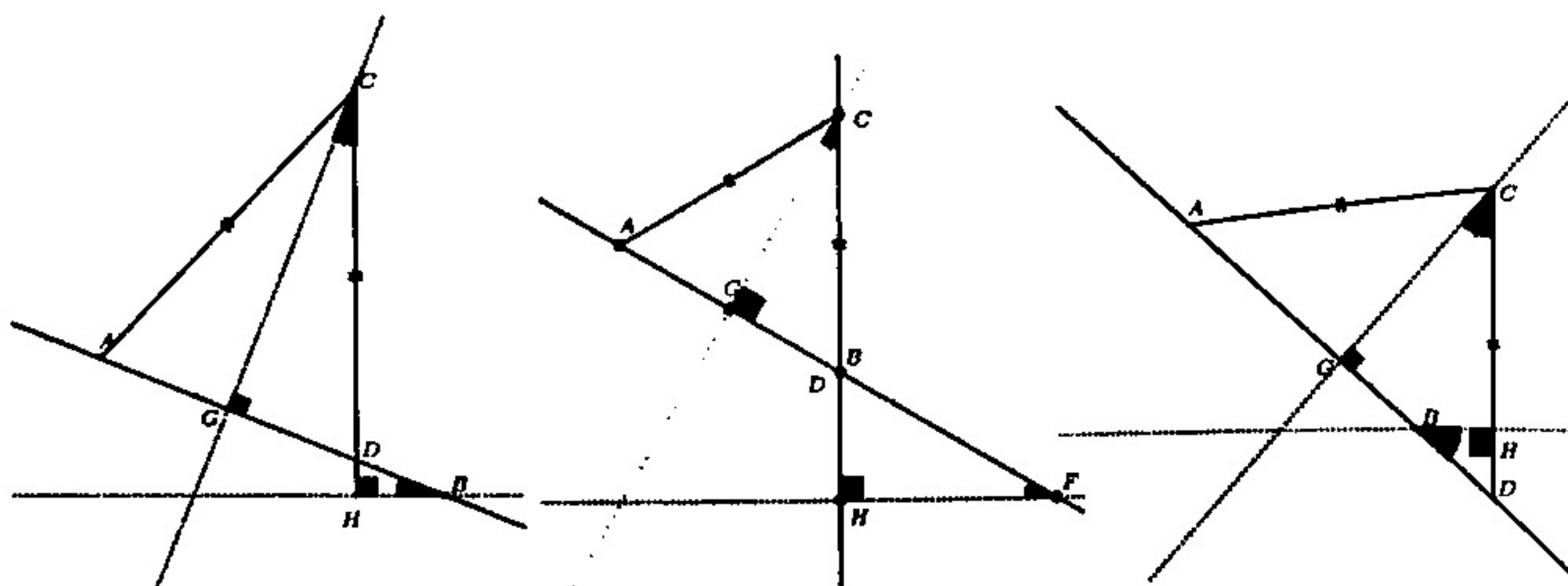


FIGURE 1 - Pente inférieure à  $30^\circ$

FIGURE 2 - Pente de  $30^\circ$

FIGURE 3 - Pente supérieure à  $30^\circ$

- Démontrer que l'angle de la pente est égal à la moitié de l'angle formé par les bâtons. Remarquer que ce raisonnement reste valable pour les trois configurations possibles.

Rappel : Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux paires d'angles opposés par le sommet qui sont égaux.

$$\text{Dans } \triangle GCD: \widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} = 180^\circ$$

$$\text{Dans } \triangle DHB: \widehat{DHB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH} = 180^\circ$$

$$\text{donc } \widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} = \widehat{DHB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH}$$

- On note  $\alpha$  l'angle de la pente. Dans le triangle rectangle CGD, exprimer  $\sin(\alpha)$  en fonction de la longueur du bâton  $L$  et l'écart sous forme de longueur algébrique entre la marque de l'empreinte du bâton et l'extrémité du bâton pendule, noté  $x$  (il s'agit de  $AB - AD$ ).

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{GD}{CD} = \frac{\frac{L-x}{2}}{\frac{L}{2}} = \frac{L-x}{2} \cdot \frac{2}{L} = \frac{L-x}{L}$$

$$\text{donc } \sin\left(\frac{L-x}{L}\right) = \alpha$$

- Quels sont les paramètres dont dépend la mesure de l'angle? Chaque paramètre est-il pris en compte dans la méthode du bâton?

La longueur des bâtons et l'écart ( $x$ ). La méthode du bâton ne compte pas la longueur du terrain.

- Par groupe, on propose de construire trois tableaux de valeurs de la pente  $\alpha$  pour des longueurs de bâtons variant de 140 cm à 160 cm par exemple 140 cm pour le premier groupe, 150 cm pour le second et 160 cm pour le dernier, en fonction des écarts algébriques suivants : -30, -20, -10, +10, +20, +30 (dont l'unité est le cm). Vous pouvez vous aider de la calculatrice (Attention, il faut que votre calculatrice soit réglée en degré et non en radian). Les résultats devront être arrondis aux centièmes.

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	42,7
-40	46
-30	37,4
-20	34,2
-10	32,4
10	27,67
20	23,38
30	23,12
40	20,22
50	18,73

TABLE 4 - Bâton de 140 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,81
-40	39,3
-30	36,9
-20	34,5
-10	32,2
10	27,8
20	25,7
30	23,6
40	21,8
50	19,5

TABLE 5 - Bâton de 150 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,01
-40	38,68
-30	36,47
-20	34,23
-10	32,05
10	27,95
20	23,97
30	23,95
40	22,02
50	20,10

TABLE 6 - Bâton de 160 cm

- Selon vous, les résultats obtenus remettent-ils en question la validité de la méthode du bâton? Argumenter votre réponse.

Non. Malgré les écarts, ils ne sont pas significatifs pour les prendre en compte.



## Activité mathématique - Modélisation de la méthode du bâton

Soit  $(AB)$  la droite représentant la pente,  $[AB]$  représente l'empreinte du bâton dans la neige,  $[AC]$  le premier bâton et  $[CD]$  le second bâton utilisé comme bâton pendule.

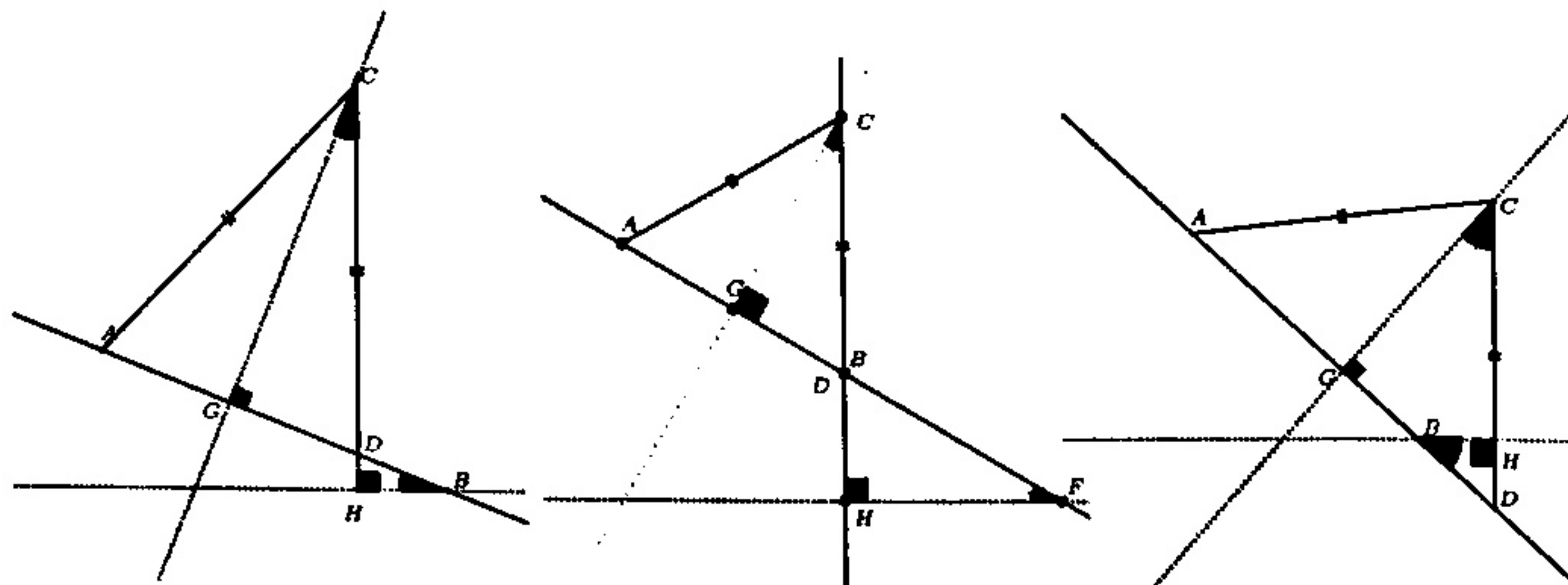


FIGURE 1 - Pente inférieure à  $30^\circ$

FIGURE 2 - Pente de  $30^\circ$

FIGURE 3 - Pente supérieure à  $30^\circ$

1. Démontrer que l'angle de la pente est égal à la moitié de l'angle formé par les bâtons. Remarquer que ce raisonnement reste valable pour les trois configurations possibles.

Rappel : Lorsque deux droites se coupent, elles forment deux paires d'angles opposés par le sommet qui sont égaux.

Dans  $\triangle GCD$  :

$$\widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} = 180^\circ$$

Dans  $\triangle DHB$  :

$$\widehat{DHB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH} = 180^\circ$$

Donc :  $\widehat{DGC} + \widehat{GCD} + \widehat{CDG} = \widehat{DHB} + \widehat{HDB} + \widehat{DBH}$

2. On note  $\alpha$  l'angle de la pente. Dans le triangle rectangle CGD, exprimer  $\sin(\alpha)$  en fonction de la longueur du bâton  $L$  et l'écart sous forme de longueur algébrique entre la marque de l'empreinte du bâton et l'extrémité du bâton pendule, noté  $x$  (il s'agit de  $AB - AD$ )

$$\sin(\alpha) = \frac{GD}{CD} = \frac{\frac{L-x}{2}}{L} \text{ ou } \frac{\frac{L-x}{2}}{\frac{L}{1}} = \frac{L-x}{2} \times \frac{1}{L} = \frac{L-x}{2L}$$

3. Quels sont les paramètres dont dépend la mesure de l'angle ? Chaque paramètre est-il pris en compte dans la méthode du bâton ?

Les paramètres qui dépendent sont :

- la longueur du bâton ( $L$ )
- et de l'écart.

Non, la longueur du bâton.

4. Par groupe, on propose de construire trois tableaux de valeurs de la pente  $\alpha$  pour des longueurs de bâtons variant de 140 cm à 160 cm par exemple 140 cm pour le premier groupe, 150 cm pour le second et 160 cm pour le dernier, en fonction des écarts algébriques suivants : -30, -20, -10, +10, +20, +30 (dont l'unité est le cm). Vous pouvez vous aider de la calculatrice (Attention, il faut que votre calculatrice soit réglée en degré et non en radian) Les résultats devront être arrondis aux centièmes.

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	42,7
-40	40,4
-30	37,4
-20	34,12
-10	32,4
10	27,62
20	25,2
30	23,13
40	20,92
50	18,79

TABLE 4 - Bâton de 140 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,81
-40	39,3
-30	36,9
-20	34,5
-10	32,7
10	27,8
20	25,7
30	23,6
40	21,8
50	19,5

TABLE 5 - Bâton de 150 cm

Ecart algébrique $x$	Pente ( $^\circ$ )
-50	41,014
-40	38,682
-30	36,42
-20	34,23
-10	32,09
10	27,95
20	25,95
30	23,97
40	22,01
50	20,01

TABLE 6 - Bâton de 160 cm

5. Selon vous, les résultats obtenus remettent-ils en question la validité de la méthode du bâton ? Argumenter votre réponse.

Les résultats sont proches à quelques degrés près.

## Prolongement numérique - Pente moyenne et pente instantanée à partir d'une carte IGN numérique (Institut Géographique National)

### Méthode pour déterminer une pente moyenne à l'aide de arctan

1. Identifier deux points sur une carte IGN et relever :
  - Le dénivelé  $\Delta h$  entre les deux points.
  - La distance horizontale  $d$  entre les deux points (aussi appelée la distance à vol d'oiseau).
2. Calculer la pente moyenne  $\alpha$  avec la formule :

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta h}{d}, \text{ où } \alpha = \arctan\left(\frac{\Delta h}{d}\right).$$

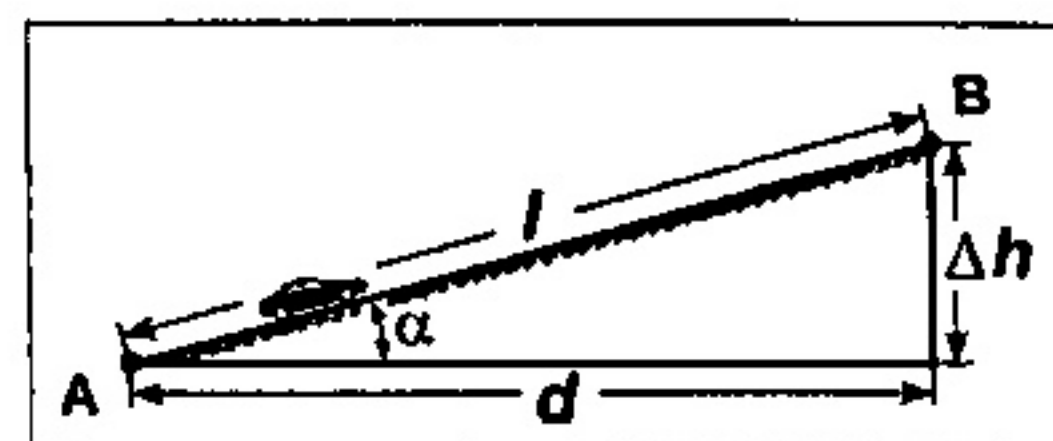


Illustration de la formule  $\tan(\alpha) = \frac{\Delta h}{d}$

### Question

1. Aller sur le site Géoportail puis rechercher Flaine (74300), Arâches-la-Frasse. Avec le fond de carte IGN, déterminer la pente moyenne entre le bas du téléski du bois et le haut du télésiège de Lindars Nord à l'aide des coordonnées (utilisez les outils symbolisés par une clé plate qui se trouve sur le bord droit de l'écran). Justifier votre résultat.

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x = 324250 \\ y = 5086949 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} x = 322093 \\ y = 5094058 \end{pmatrix} \\ \vec{AB} \begin{pmatrix} -2153 \\ 8709 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(-2153)^2 + (8709)^2} \\ \approx 8995 \\ \arctan\left(\frac{8709}{2153}\right) \approx 76 \\ \text{la pente est } 76^\circ. \end{aligned}$$

2. On conserve le même point de départ et d'arrivée de la question précédente auquel on rajoute un point intermédiaire à savoir le haut des télécabine de Aup de Vêran. Tracer l'itinéraire à l'aide de l'outil "Etablir un profil altimétrique". L'itinéraire est-il praticable ou non sans prendre trop de risque ? Justifier.

L'itinéraire n'est pas praticable car la plus forte pente est de 76% et la pente moyenne est de 20%, ce qui signifie qu'il y a des pentes entre 30° et 45°, ce qui n'est pas praticable.

3. A l'aide de la carte des pentes sur Géoportail, déterminer si l'itinéraire comporte ou non des passages à risques. Modifier au besoin l'itinéraire afin qu'il ne comporte pas de pente instantanée comprise entre 30° et 45°.

Il y a un passage à risque au niveau du télésiège de Lindars Nord, il faudra donc faire un détour par la tête du Montlieu pour ensuite atteindre le haut du télésiège de Lindars Nord.

## Prolongement numérique - Pente moyenne et pente instantanée à partir d'une carte IGN numérique (Institut Géographique National)

### Méthode pour déterminer une pente moyenne à l'aide de arctan

1. Identifier deux points sur une carte IGN et relever :
  - Le dénivelé  $\Delta h$  entre les deux points.
  - La distance horizontale  $d$  entre les deux points (aussi appelée la distance à vol d'oiseau).
2. Calculer la pente moyenne  $\alpha$  avec la formule :

$$\tan(\alpha) = \frac{\Delta h}{d}, \text{ où } \alpha = \arctan\left(\frac{\Delta h}{d}\right).$$

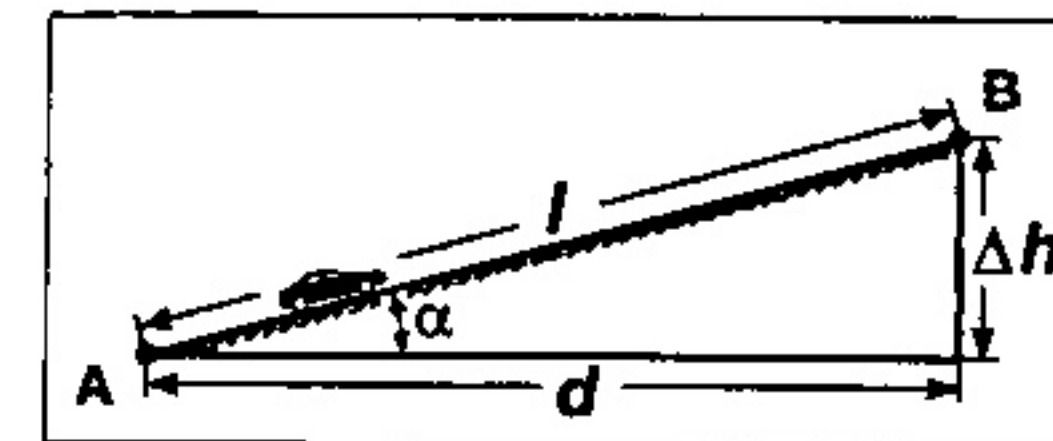


Illustration de la formule  $\tan(\alpha) = \frac{\Delta h}{d}$

### Question

1. Aller sur le site Géoportail puis rechercher Flaine (74300), Arâches-la-Frasse. Avec le fond de carte IGN, déterminer la pente moyenne entre le bas du téléski du bois et le haut du télésiège de Lindars Nord à l'aide des coordonnées (utilisez les outils symbolisés par une clé plate qui se trouve sur le bord droit de l'écran). Justifier votre résultat.

$$\begin{aligned} \text{altitude bas du téléski du bois} &: 1575,01 \text{ m} \\ \text{altitude haut du télésiège Nord} &: 2676,62 \text{ m} \\ \Delta h &= 2676,62 - 1575,01 = 1101,61 \text{ m} \quad d = 3070 \text{ m} \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{\Delta h}{d}\right) = \arctan\left(\frac{1101,61}{3070}\right) = 19,59^\circ \\ \text{La pente moyenne est de } 19,59^\circ \end{aligned}$$

2. On conserve le même point de départ et d'arrivée de la question précédente auquel on rajoute un point intermédiaire à savoir le haut des télécabine de Aup de Vêran. Tracer l'itinéraire à l'aide de l'outil "Etablir un profil altimétrique". L'itinéraire est-il praticable ou non sans prendre trop de risque ? Justifier.

Dans le profil altimétrique, nous voyons que la pente moyenne est de 30% soit 90' → 100%.  $\frac{30 \times 90}{100} = 27^\circ$  soit presque la limite pour des skieurs, et la plus forte pente est de 76% soit  $\frac{76 \times 90}{100} = 68,4^\circ$ .  
L'itinéraire est donc non praticable.

3. A l'aide de la carte des pentes sur Géoportail, déterminer si l'itinéraire comporte ou non des passages à risques. Modifier au besoin l'itinéraire afin qu'il ne comporte pas de pente instantanée comprise entre 30° et 45°.