

TraAM - Une possibilité vous manque et tout est dépeuplé

Niveau :

Seconde générale

Durée :

20 minutes

Objectifs :

L'objectif de cette activité est de présenter un raisonnement mathématique erroné, où deux nombres distincts choisis arbitrairement sont, à la fin du raisonnement, égaux.

Le but est de permettre aux élèves d'évaluer ce raisonnement en posant des questions et en identifiant les éventuelles erreurs, notamment en substituant des valeurs spécifiques aux variables.

Une fois la ligne où l'erreur est suspectée identifiée, les élèves doivent comprendre pourquoi cette étape est incorrecte et, si possible, la corriger.

Cette activité offre une opportunité de révision des concepts de calculs littéraux, de carré de nombres et de racine carrée tout en développant l'esprit critique.

Compétence travaillé de l'esprit critique :

Cette activité vise à développer plusieurs compétences mathématique au travers de l'esprit critique chez les élèves, à savoir :

- Analyser des arguments,
- Poser des questions de clarification,
- Construire une procédure de décision,

Retour élève :

Un tiers des élèves considèrent le raisonnement comme faux, tandis que certains sont indécis et d'autres envisagent encore la possibilité d'un raisonnement par l'absurde. Après avoir effectué la substitution des valeurs, ceux qui étaient indécis reviennent à la première question en affirmant que le raisonnement est faux. Seuls quelques élèves parviennent à corriger l'erreur par eux-mêmes. Il est donc suggéré de présenter le raisonnement corrigé pour clarifier les points d'erreur et renforcer la compréhension des élèves si l'activité devient chronophage.

Une possibilité vous manque et tout est dépeuplé

Soit a, b deux nombres distincts et l'on note m la moyenne arithmétique de a, b .

$$\begin{aligned} m &= \frac{a+b}{2} && \text{Par définition de la moyenne,} && (1) \\ \Leftrightarrow 2m &= a+b && \text{on multiplie par 2,} && (2) \\ \Leftrightarrow 2m(a-b) &= (a+b)(a-b) && \text{on multiplie par } (a-b), && (3) \\ \Leftrightarrow 2ma - 2mb &= a^2 - b^2 && \text{on développe,} && (4) \\ \Leftrightarrow b^2 - 2mb &= a^2 - 2ma && \text{on regroupe les termes en a et en b respectivement ensemble,} && (5) \\ \Leftrightarrow b^2 - 2mb + m^2 &= a^2 - 2ma + m^2 && \text{on ajoute } m^2, && (6) \\ \Leftrightarrow (b-m)^2 &= (a-m)^2 && \text{on reconnaît une identité remarquable,} && (7) \\ \Leftrightarrow b-m &= a-m && \text{on applique la fonction racine carré,} && (8) \\ \Leftrightarrow b &= a && \text{on ajoute } m, && (9) \end{aligned}$$

Deux nombres quelconques sont donc égaux.

Questions

1. Que pensez-vous du raisonnement précédent ?
2. Vérifier chaque ligne du raisonnement en posant $a = 5$ et $b = 3$ et donc que " $5 = 3$ ".
3. Conclure et corriger le raisonnement si besoin.

Élément de correction

Soit a, b deux nombres distincts et l'on note m la moyenne arithmétique de a, b .

$$\begin{aligned} m &= \frac{a+b}{2} \\ \Leftrightarrow 2m &= a+b \\ \Leftrightarrow 2m(a-b) &= (a+b)(a-b) \\ \Leftrightarrow 2ma - 2mb &= a^2 - b^2 \\ \Leftrightarrow b^2 - 2mb &= a^2 - 2ma \\ \Leftrightarrow b^2 - 2mb + m^2 &= a^2 - 2ma + m^2 \\ \Leftrightarrow (b-m)^2 &= (a-m)^2 \\ \Leftrightarrow b-m &= a-m \text{ ou } b-m = -a+m \\ \Leftrightarrow b &= a \text{ (ce qui est absurde sauf si } a=b) \text{ ou } \frac{a+b}{2} = m \end{aligned}$$