

TraAM - Terminale spécialité - Vers le Théorème de Borsuk-Ulam, cas $n = 1$

Niveau :

Terminale spécialité

Durée :

Indéterminée (*Devoir à la maison*)

Objectifs :

L'objectif de l'activité est d'établir qu'à tout moment sur Terre, il existe deux points antipodaux ayant la même température. Il s'agit d'une activité qui lie le repérage dans l'espace à l'étude des fonctions, mettant en exergue la continuité qui offre des résultats particuliers.

Une fois le résultat prouvé, l'esprit critique est sollicité pour identifier les présupposés qui nous ont permis d'aboutir à ce résultat. Ensuite, les élèves doivent fournir des exemples avec des grandeurs différentes. Enfin, certains élèves pourront tenter de généraliser en formulant un résultat mathématique sur les fonctions continues.

Compétence travaillé de l'esprit critique :

Cette activité vise à développer plusieurs compétences mathématique au travers de l'esprit critique chez les élèves, à savoir :

- Analyser des arguments,
- Mettre en place un raisonnement inductif,
- Identifier des présupposés.

Retour élève :

C'est une activité difficile, elle est recommandée peut-être pour les élèves étant à l'aise avec la notion de continuité.

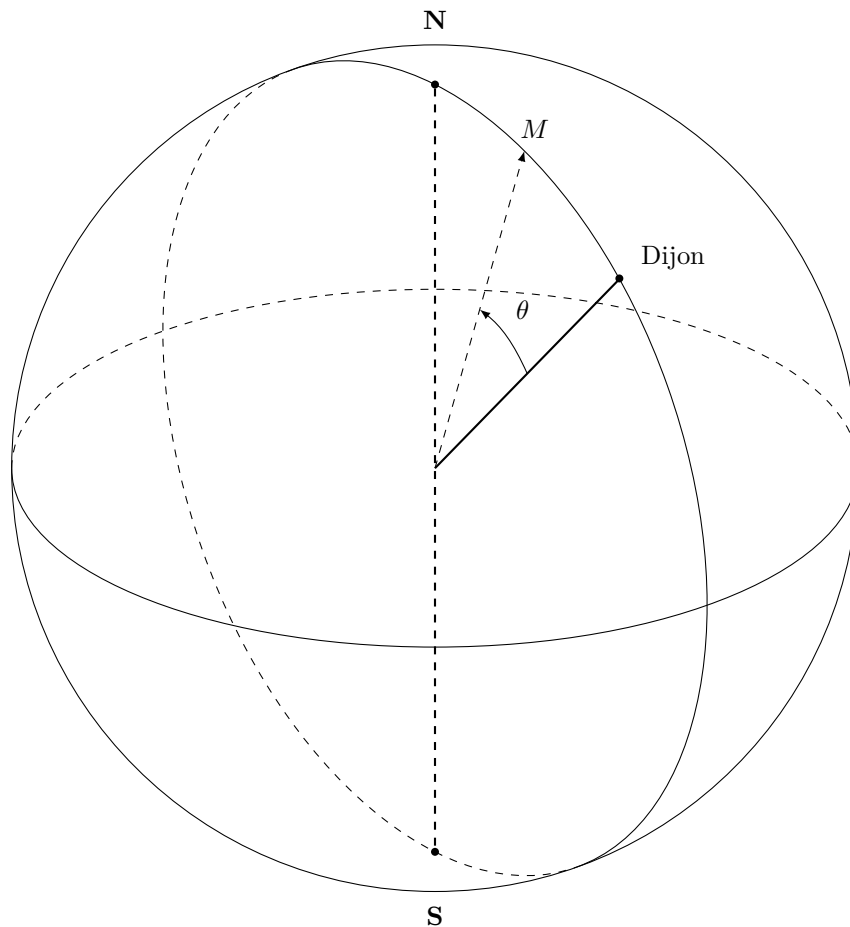
Le résultat en lui-même a du mal à être approuvé même après qu'il soit prouvé, car cela semble contre-intuitif pour certains.

En revanche, les exemples foisonnent avec des grandeurs différentes. Les hypothèses nécessaires au raisonnement sont assez bien identifiées car peu nombreuses, c'est d'ailleurs ce qui fait la force du résultat selon les élèves eux-mêmes.

TraAM - Terminale spécialité - Vers le Théorème de Borsuk-Ulam, cas $n = 1$

Le but de l'activité est d'établir que sur la Terre, il existe, en tout instant, deux points antipodaux ayant la même température. Pour cela, nous ferons usage de concepts mathématiques et de géographie.

Prenons le méridien passant par Dijon, on suppose que celui-ci est un cercle, on se repère sur le méridien à l'aide d'un angle orienté θ (*exprimé en rad*) déterminé comme l'angle orienté formé par Dijon, le centre de la terre et un point mobile M sur le méridien. Le sens de l'orientation est donné par le schéma suivant.



Représentation et mise en place du repère

1. Soit $\theta \in [0; \pi]$, représenter en rouge l'ensemble des positions possibles pour M.
2. Représenter sur le schéma le point M' dont l'angle orienté est $\theta - \pi$, quel est le lien entre les points M et M' ?

Températures et différences

Soit t un instant fixé, on note $T(\theta)$ la température associée à chacun des points du méridien, on suppose que la fonction T est continue sur $[-\pi; \pi]$. Par exemple, $T(0)$ représente la température à Dijon à un instant donné.

3. Est-ce que supposer T continue vous semble naturel ?
4. Que dire de $T(\pi)$ et $T(-\pi)$?
5. Justifier que la fonction $\theta \mapsto T(\theta - \pi)$ est bien définie et continue sur $[0; \pi]$. Que représente ce nombre ?

On pose la fonction $\Delta : \theta \mapsto T(\theta) - T(\theta - \pi)$, avec $\theta \in [0; \pi]$.

6. Expliquer ce que réalise cette fonction Δ .
7. Justifier que Δ est définie et continue.
8. Supposons que $\Delta(0) = 0$, que peut-on dire ?
9. Supposons maintenant que $\Delta(0) \neq 0$, exprimer $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$, quel est le lien entre les deux images ?
10. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $\theta_\Delta \in]0; \pi[$ tel que $\Delta(\theta_\Delta) = 0$. Conclure.

Étendre son raisonnement

11. Serait-il possible de transposer le principe utilisé dans cet exercice à une autre grandeur que la température ? Déterminer les critères nécessaires et suffisants permettant le succès de cette transposition à travers les questions réalisées et donner des exemples avec des grandeurs différentes.
12. Généraliser en formulant un résultat mathématique en lien avec les questions précédentes.

Élément de correction de températures et différences

3. Imaginer que T ne soit pas continue en un nombre $a \in [-\pi; \pi]$, signifierai qu'en s'approchant du lieu formant un angle orienté a , la température ne serait pas la même en s'approchant dans des sens différents, ce qui semble absurde.
4. Bien que les angles orientés π et $-\pi$ soient différents, ils représentent le même endroit à savoir l'antipode de la ville de Dijon, qui se situe dans l'océan pacifique, proche de la Nouvelle-Zélande. Ainsi

$$T(\pi) = T(-\pi)$$

5. On sait que

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \pi \\ \iff -\pi \leq \theta - \pi \leq 0 \end{aligned}$$

Donc $\theta \mapsto T(\theta - \pi)$ est bien définie et continue sur $[0; \pi]$ par composée de fonction continue.

$T(\theta - \pi)$ représente la température au antipode du point formant un angle orienté θ .

6. Cette fonction Δ réalise l'écart de température, au signe près, entre deux point antipodaux sur le méridien passant par Dijon.
7. Les deux fonctions $\theta \mapsto T(\theta)$ et $\theta \mapsto T(\theta - \pi)$ sont bien définies et continue sur $[0; \pi]$ par définition et par la question 5). Ainsi la fonction Δ qui associe la différence des deux fonctions est bien définie et continue sur $[0; \pi]$.
8. On peut dire que l'écart de température entre Dijon et son antipode est nul, autrement dit, il existe deux points antipodaux où il fait la même température.
9. Par définition de Δ on a,

$$\Delta(0) = T(0) - T(-\pi)$$

et

$$\Delta(\pi) = T(\pi) - T(0)$$

Or on sait d'après la question 4) que

$$T(\pi) = T(-\pi)$$

Donc

$$\Delta(0) = T(0) - T(\pi)$$

Et on remarque que

$$\Delta(0) = -\Delta(\pi)$$

10. Nous avons donc une fonction continue Δ sur l'intervalle $[0; \pi]$. De plus le signe de $\Delta(0)$ est opposé à celui de $\Delta(\pi)$. Par conséquent, pour tout nombre compris c entre $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$, il existe un nombre α dans $[0; \pi]$ tel que $\Delta(\alpha) = c$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or $\Delta(0) \neq 0$ donc 0 est compris entre $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$ strictement, d'où l'existence d'un nombre $\alpha \in]0; \pi[$ tel que $\Delta(\alpha) = 0$. On pose $\alpha = \theta_\Delta$

Ainsi le point du méridien passant par Dijon et formant un angle orienté θ_Δ , et son antipode possède la même température.

Sur la Terre, il existe donc, en tout instant, deux points antipodaux ayant la même température.