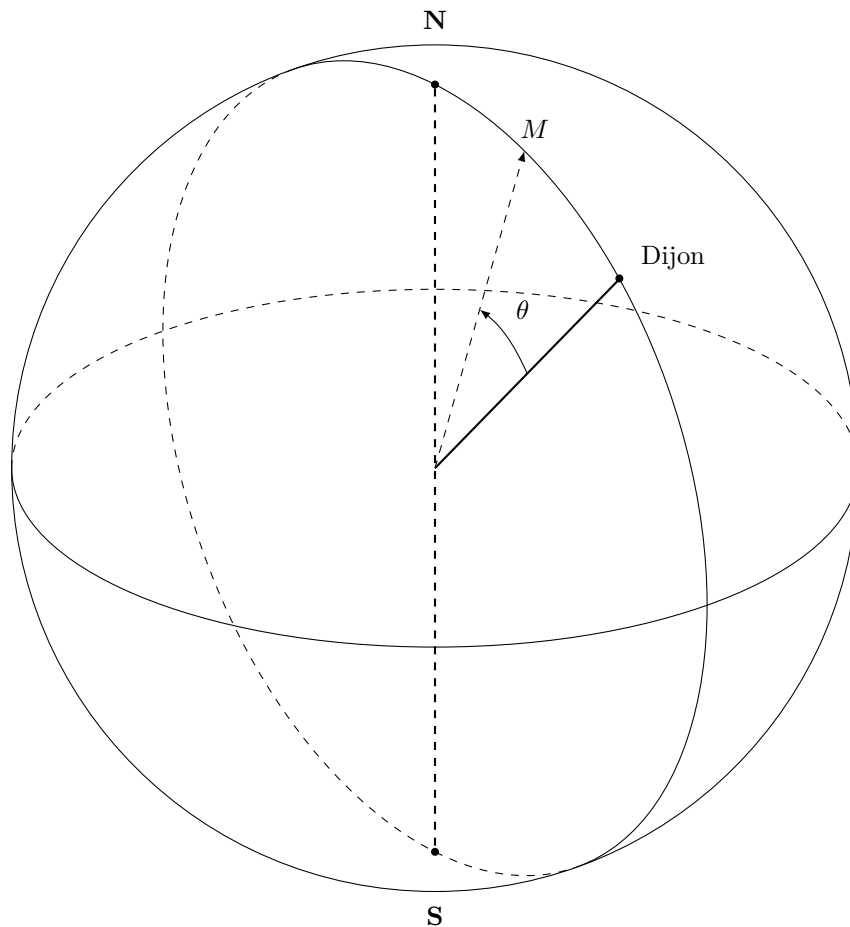

TraAM - Terminale spécialité - Vers le Théorème de Borsuk-Ulam, cas $n = 1$

Le but de l'activité est d'établir que sur la Terre, il existe, en tout instant, deux points antipodaux ayant la même température. Pour cela, nous ferons usage de concepts mathématiques et de géographie.

Prenons le méridien passant par Dijon, on suppose que celui-ci est un cercle, on se repère sur le méridien à l'aide d'un angle orienté θ (*exprimé en rad*) déterminé comme l'angle orienté formé par Dijon, le centre de la terre et un point mobile M sur le méridien. Le sens de l'orientation est donné par le schéma suivant.



Représentation et mise en place du repère

1. Soit $\theta \in [0; \pi]$, représenter en rouge l'ensemble des positions possibles pour M.
2. Représenter sur le schéma le point M' dont l'angle orienté est $\theta - \pi$, quel est le lien entre les points M et M' ?

Températures et différences

Soit t un instant fixé, on note $T(\theta)$ la température associée à chacun des points du méridien, on suppose que la fonction T est continue sur $[-\pi; \pi]$. Par exemple, $T(0)$ représente la température à Dijon à un instant donné.

3. Est-ce que supposer T continue vous semble naturel ?
4. Que dire de $T(\pi)$ et $T(-\pi)$?
5. Justifier que la fonction $\theta \mapsto T(\theta - \pi)$ est bien définie et continue sur $[0; \pi]$. Que représente ce nombre ?

On pose la fonction $\Delta : \theta \mapsto T(\theta) - T(\theta - \pi)$, avec $\theta \in [0; \pi]$.

6. Expliquer ce que réalise cette fonction Δ .
7. Justifier que Δ est définie et continue.
8. Supposons que $\Delta(0) = 0$, que peut-on dire ?
9. Supposons maintenant que $\Delta(0) \neq 0$, exprimer $\Delta(0)$ et $\Delta(\pi)$, quel est le lien entre les deux images ?
10. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $\theta_\Delta \in]0; \pi[$ tel que $\Delta(\theta_\Delta) = 0$. Conclure.

Étendre son raisonnement

11. Serait-il possible de transposer le principe utilisé dans cet exercice à une autre grandeur que la température ? Déterminer les critères nécessaires et suffisants permettant le succès de cette transposition à travers les questions réalisées et donner des exemples avec des grandeurs différentes.
12. Généraliser en formulant un résultat mathématique en lien avec les questions précédentes.