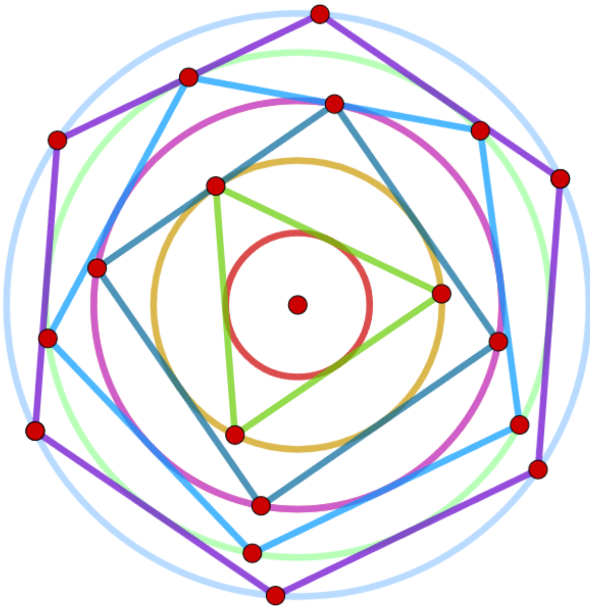
<u>Des polygones circonscrits</u>

On considère le procédé suivant :



- Soit un cercle de rayon 1.
- On construit un triangle équilatéral circonscrit à ce cercle : les 3 côtés du triangle sont tangents au cercle.
- Puis on construit le cercle circonscrit au triangle : le cercle passe par les 3 sommets du triangle.
- Puis on construit un carré circonscrit au nouveau cercle : les 4 côtés du carré sont tangents au cercle.
- Puis on construit le cercle circonscrit au carré
- Puis on construit un pentagone circonscrit au cercle…

A chaque étape, on construit un cercle circonscrit à un polygone régulier à n côtés, puis le polygone régulier à (n+1) côtés circonscrit au cercle, et on continue à l'infini.
La figure ci-dessous représente les étapes pour n variant de 3 à 6.

On se pose la question suivante : le rayon des cercles ainsi construit tend-il vers l'infini avec n ?

On note r_n le rayon du cercle tangent intérieurement au polygone à *n* côtés P_n ; on a ainsi : $r_3 = 1$. On définit la suite (r_n) des rayons des cercles circonscrits. On nomme O le centre commun de tous les cercles et de tous les polygones.

0) Interrogez votre IA favorite : quelle est selon elle la réponse à ce problème ?
1) Prouver que $r_4 = 2$.
2) Dans un polygone régulier, on appelle ***apothème*** un segment qui relie le centre du polygone et le milieu d'un côté. Ce segment est perpendiculaire à ce côté en son milieu.
   a) Expliquer pourquoi r_n est égal à la longueur de l'apothème.
   b) Montrer que $r_{n+1} = \frac{r_n}{cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}$ *(indication : on pourra utiliser la trigonométrie dans un triangle rectangle dont l'un des sommets est O)*
3) En utilisant la relation de récurrence, déterminer une expression explicite pour r_n en fonction de *n*.
4) Complétez le programme Python ci-contre, pour calculer r_n pour une valeur donnée de *n*.
5) En faisant tourner ce programme pour de grandes valeurs de n, conjecturer une réponse à la question posée.

```
import math
def calcule_Rn(n):

    Rn = ….

    for k in range(3, n + 1):
        angle = …..
        cos_value = math.cos(angle)
        Rn = …..
    return Rn

# Exemple d'utilisation :
n = 100
print(calcule_Rn(n))
```