

Pour débiter cette activité, les élèves sont répartis par groupe de trois et il est préférable que les niveaux des élèves soient hétérogènes au sein de chaque groupe.

### I- La construction :

Chaque groupe effectue indépendamment le programme de construction ci-dessous :

Réaliser le programme de construction suivant à l'aide des outils habituels de géométrie (Règle, équerre, compas) :

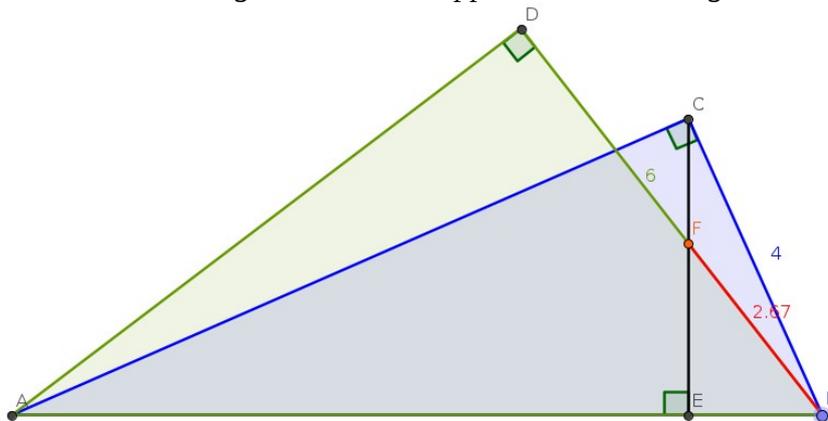
Tracer un segment  $[AB]$  d'une longueur strictement supérieure à 6 cm.

Placer deux points C et D du même côté de la droite  $(AB)$  tels que les triangles ABC et ABD soient rectangles en C et D et que  $BC = 4$  cm et  $BD = 6$  cm.

Dans le triangle ABC, la hauteur issue de C coupe le segment  $[AB]$  en E et le segment  $[BD]$  en F.

Demander à chaque groupe de mesurer la longueur  $BF$ .

Tous les groupes obtiennent une longueur similaire approximativement égale à 2,7 cm.



Lancer le débat sur les résultats obtenus :

- Sont-ils tous réellement identiques alors que les constructions de chaque groupe ont des longueurs différentes ?
- Est-il possible que ce soit un hasard ?
- Les constructions graphiques peuvent-elles nous garantir l'égalité des résultats obtenus ?

Comment trancher ce débat ?

Cette question amène à l'émergence de la nécessité d'une preuve. Mais reste la question de comment l'obtenir ? Avec quels moyens ?

## II- Fabrication de la preuve :

Dans cette partie les groupes travailleront sur différentes pistes pour obtenir une preuve :

- Certains groupes seront invités à réfléchir sur l'utilisation de la trigonométrie.
- D'autres groupes seront invités à réfléchir sur la notion de triangles semblables.
- Les derniers groupes utiliseront des outils d'intelligence artificielle (Chat GPT ou Mistral AI)

### a. Preuve par la trigonométrie :

Les groupes travaillant sur cette preuve savent qu'ils doivent utiliser la trigonométrie. Le professeur leur apporte de l'aide et les aiguillent pour aboutir à la preuve.

On note  $\alpha = \widehat{ABC}$  et  $\alpha' = \widehat{ABD}$ .

En considérant l'angle  $\alpha$ , on peut donc écrire :

Dans le triangle ABC rectangle en C :

$$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AB} \text{ soit } \cos(\alpha) = \frac{4}{AB}$$

Dans le triangle EBC rectangle en E :

$$\cos(\alpha) = \frac{BE}{BC} \text{ soit } \cos(\alpha) = \frac{BE}{4}$$

On peut donc en déduire que :

$$\frac{4}{AB} = \frac{BE}{4} \text{ soit } AB \times BE = 16$$

En considérant l'angle  $\alpha'$ , on peut donc écrire :

Dans le triangle ABD rectangle en D :

$$\cos(\alpha') = \frac{BD}{AB} \text{ soit } \cos(\alpha') = \frac{6}{AB}$$

Dans le triangle EBF rectangle en E :

$$\cos(\alpha') = \frac{BE}{BF}$$

On peut donc en déduire que :

$$\frac{6}{AB} = \frac{BE}{BF} \text{ soit } BF = \frac{AB \times BE}{6}$$

Mais on a vu précédemment que  $AB \times BE = 16$  donc  $BF = \frac{AB \times BE}{6} = \frac{16}{6} \approx 2,7$  cm arrondi au mm.

### b. Preuve par les triangles semblables :

Les groupes travaillant sur cette preuve savent qu'ils doivent utiliser la trigonométrie. Le professeur leur apporte de l'aide et les aiguillent pour aboutir à la preuve.

On donne les rappels suivants aux élèves :

#### Rappels :

1. Deux triangles sont dits semblables si et seulement si ils ont les mêmes angles.
2. Si deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables alors les rapports entre les côtés qui se correspondent sont égaux :  $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Les triangles ABC et EBC sont semblables (Angle droit et angle  $\widehat{ABC}$  commun aux deux triangles donc troisième angle commun également) donc :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{EC} \text{ et on peut donc en déduire que } AB \times BE = BC \times BC$$

$$\text{soit } AB \times BE = 4 \times 4 = 16$$

Les triangles ABD et EBF sont semblables (Angle droit et angle  $\widehat{ABD}$  commun aux deux triangles donc troisième angle commun également) donc :

$$\frac{AB}{BF} = \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{EF} \text{ et on peut donc en déduire que } AB \times BE = BF \times BD = BF \times 6$$

On peut donc conclure que  $BF \times 6 = 16$  soit  $BF = \frac{16}{6} \approx 2,7$  cm arrondi au mm.

### c. Preuve par l'intelligence artificielle :

*Les groupes travaillant sur cette preuve sont libres d'utiliser Chat GPT ou Mistral AI pour aboutir à une preuve.*

*Le professeur les laisse en autonomie et passe leur demander ce qu'ils en pensent, ce qu'il comprennent de la réponse donnée par l'IA et les incite à réinterroger l'IA en précisant leur prompt.*

### Exemple de prompt :

ABC et ABD sont deux triangles rectangles tels C et D sont du même côté de la droite (AB). De plus, on a  $BC = 4$  et  $BD = 6$ .

Dans le triangle ABC, la hauteur issue de C coupe le segment [AB] en E et le segment [BD] en F. Combien mesure BF ?

### Exemple de réponse (Chat GPT) :

Reprenons les données du problème étape par étape :

—  
\*\*Données :\*\*

\* ABC et ABD sont deux triangles rectangles. \* Les points C et D sont \*\*du même côté de la droite AB\*\*. \*  $\angle ACB = 90^\circ$  donc ABC est rectangle en C. \*  $\angle ADB = 90^\circ$  donc ABD est rectangle en D. \*  $BC = 4$ ,  $BD = 6$ . \* Dans le triangle ABC, la hauteur issue de C coupe :

\* AB en E, \* BD en F. \* On cherche \*\*la longueur BF\*\*.

—  
\*\*Étapes de résolution :

1. \*\*Placer les points dans un repère :

Preons un repère pour faciliter la géométrie analytique :

\* Plaçons A à l'origine (0,0), \* Plaçons B sur l'axe des abscisses, disons  $B = (b, 0)$ , \* Comme  $\angle ACB = 90^\circ$ , C est tel que  $\vec{AC} \perp \vec{BC}$ .

2. \*\*Coordonnées de C :

Soit  $C = (x, y)$ . Le vecteur  $\vec{AC} = (x, y)$ ,  $\vec{BC} = (x - b, y)$ .

La condition  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$  donne :

$$(x)(x - b) + y \cdot y = 0 \Rightarrow x(x - b) + y^2 = 0$$

Et on sait que :

$$BC^2 = (x - b)^2 + y^2 = 16 \quad (\text{car } BC = 4)$$

3. \*\*Utiliser les deux équations :

\* De  $x(x - b) + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = -x(x - b)$  \* Remplacer dans la seconde équation :

$$(x - b)^2 + (-x(x - b)) = 16 \Rightarrow (x - b)^2 - x(x - b) = 16$$

Développons :

$$x^2 - 2bx + b^2 - x^2 + bx = 16 \Rightarrow -bx + b^2 = 16 \Rightarrow bx = b^2 - 16 \Rightarrow x = \frac{b^2 - 16}{b}$$

4. Déterminer les coordonnées de D :

De même, triangle  $ABD$  est rectangle en  $D$ , donc  $\vec{AD} \perp \vec{BD}$

Soit  $D = (u, v)$ . Alors :

$$\vec{AD} = (u, v) \quad \vec{BD} = (u - b, v)$$

Donc :

$$\vec{AD} \cdot \vec{BD} = u(u - b) + v^2 = 0 \Rightarrow v^2 = -u(u - b)$$

et

$$BD^2 = (u - b)^2 + v^2 = 36$$

Donc :

$$(u - b)^2 - u(u - b) = 36$$

On peut répéter les calculs comme pour  $C$ ... Mais il y a une meilleure méthode ici.

Astuce géométrique :

Les triangles  $ABC$  et  $ABD$  sont rectangles en  $C$  et  $D$ , donc les points  $C$  et  $D$  sont sur les cercles de diamètre

$$AB]$$

Ces deux cercles sont symétriques par rapport à la droite  $AB$ , donc les hauteurs depuis  $C$  et  $D$  vers  $AB$  sont perpendiculaires. Puisque  $CE$  est une hauteur dans le triangle  $ABC$ , et qu'elle coupe  $BD$  en  $F$ , alors  $F$  est le pied de la perpendiculaire

Donc, on peut utiliser les propriétés géométriques des triangles rectangles et des hauteurs pour résoudre ce problème plus simplement :

Utilisons la géométrie dans un cas concret :

Choisissons :

$$A = (0, 0) \quad B = (5, 0) \quad (\text{longueur arbitraire, on ajustera après})$$

Trouvons  $C$  tel que  $\angle ACB = 90^\circ$  et  $BC = 4$

Prenons  $C = (0, y)$ . Cela donne :

$$AC = \sqrt{0^2 + y^2} = |y| \quad BC = \sqrt{(5)^2 + y^2} = 4 \Rightarrow 25 + y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = -9$$

Impossible.

Essayons plutôt  $C = (x, y)$  avec :

$$AB = 5 \quad BC = 4 \quad \angle ACB = 90^\circ$$

Une construction géométrique montre que le triangle rectangle  $ABC$  avec angle droit en  $C$ , et  $AB = 5$ , implique que  $AC^2 + BC^2 = AB^2$ , donc :

$$AC^2 + 16 = 25 \Rightarrow AC^2 = 9 \Rightarrow AC = 3$$

Donc, triangle rectangle en  $C$ , avec  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $AB = 5$  triangle 3-4-5 rectangle.

Donc, posons :

$$A = (0, 0) \quad B = (5, 0) \quad C = (0, 3)$$

Vérifions :

$$AC = 3 \quad BC = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} \quad \text{non}$$

Mais si on prend :

$$C = (3, 4), \text{ alors :}$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad BC = \sqrt{(5 - 3)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \neq 4$$

Revenons : choisissons directement un triangle rectangle  $ABC$  avec  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $AB = 5$ , et  $C$  tel que cela fonctionne.

Prenons :

$$A = (0, 0) \quad B = (5, 0) \quad C = (3, 4)$$

Vérification :

$$AC = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \quad BC = \sqrt{(5 - 3)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \quad \text{encore raté.}$$

Mais si on prend :

$$A = (0, 0) \quad B = (5, 0) \quad C = (3, 4)$$

Alors :

$$AC = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad BC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

Pas égal à 4...

Change de tactique : utiliser le triangle rectangle :

Prenons un triangle  $ABC$  avec  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ , donc  $AB = 5$  (théorème de Pythagore).

Donc dans ce triangle rectangle,  $AB = 5$ ,  $C$  est à l'intersection des cercles définis par ces distances.

On peut poser :

$$AB = 5 \quad BC = 4 \quad \text{Hauteur depuis } C \text{ sur } AB \text{ tombe en } E \quad \text{Cette hauteur coupe } BD = 6 \text{ en}$$

F

Puisque  $\triangle ABC$  est rectangle en  $C$ , alors la hauteur issue de  $C$  sur l'hypoténuse  $AB$  mesure :

$$h = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Donc, la hauteur  $CE = \frac{12}{5}$  coupe  $BD = 6$  en un point  $F$ , perpendiculaire à  $AB$ .  
Comme  $AB$  est horizontal, la hauteur est verticale (axe des ordonnées).  
On trace la droite verticale passant par  $C$ , et regardons où elle coupe

### **III- Mise en commun :**

*Au moins un groupe par méthode présente le résultats de ses recherches à la classe.  
Débat sur la preuve la plus convaincante et sur les capacités à critiquer et/ou corriger le travail des IA*

### **IV- Retour d'expérience :**

Lors de la partie I, il est apparu que les élèves ne maîtrisent pas les constructions à la règle non graduée et au compas. Le théorème précisant qu'un triangle inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre est rectangle n'est pas connu des élèves. Il faut donc prévoir de voir ce résultat en amont de l'activité ou de prendre un temps pendant l'activité.

Pour la partie II, les groupes ayant travaillé sur les preuves par trigonométrie et triangles semblables ont effectué une activité mathématique classique. Il n'y a donc pas eu de réelles surprises. Leur difficultés viennent la plupart du temps du fait qu'il ont tendance à vouloir utiliser les longueurs particulières de leur construction dans leur démarche sans se rendre compte que cela détruit la notion de généralité de la preuve. Il est donc nécessaire de les reprendre sur ce point pour leur rappeler l'aspect général de la preuve.

Les groupes travaillant sur l'IA ont éprouvé beaucoup de difficulté pour établir un prompt valide. Un groupe a tenté de prendre sa construction en photo et de la transmettre à l'IA. Cette tentative s'est soldé par un échec parce que l'IA utilisé les grandeurs particulière de la figure qu'elle avait déduit on ne sait pas trop comment. Un autre groupe à beaucoup réinterrogé l'IA en invalidant les réponses qui donnaient une valeur trop différente des valeurs expérimentalement constatées. Mais lorsque l'IA donna une réponse dans la fourchette des valeurs expérimentalement constatées, il ont été incapable de comprendre les explications fournies par l'IA.

En un mot, aucun groupe n'est parvenu à une preuve convaincante fournie par une IA.

Enfin la partie III, avec la mise en commun a mis en évidence qu'il été compliqué voire impossible d'arriver à une preuve par le biais de l'utilisation d'un IA alors qu'une preuve mathématique claire et concise est obtenue par le biais des triangles semblables ou de la trigonométrie.